КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕПЛОФИЗИКИ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

3D моделирование физических процессов

Комбинированные схемы

**Лектор: PhD
Максимов Валерий Юрьевич**

КОМБИНИРОВАННЫЕ СХЕМЫ

Можно использовать схему, в которой для конвективного члена используется явная односторонняя аппроксимация, а для диффузионного – неявная симметричная аппроксимация с весовым коэффициентом $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} + u\,\frac{f_{i,n} - f_{i-1,n}}{\Delta x} =$$

$$= a\,\frac{f_{i+1,n+1} + f_{i-1,n+1} - 2f_{i,n+1}}{2\Delta x^2} + a\,\frac{f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - 2f_{i,n}}{2\Delta x^2} \quad (1)$$

Такая схема является неявной, а следовательно, абсолютно устойчива.

Т.к. для n=1 значение n-1 не определено, то избежать этого можно следующем образом.

Положим в выражении (2) *c=1, d=1/2* – предельные условия устойчивости.

$$f_{i,n+1} = \left[f_{i,n-1} - c\left(f_{i+1,n} - f_{i-1,n}\right) + 2d\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - f_{i,n-1}\right)\right] / \left(1 + 2d\right) \qquad (2)$$

$$f_{i,n+1} = \frac{\left[f_{i,n-1} - f_{i+1,n} + f_{i-1,n} + 2 \cdot \frac{1}{2}\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - f_{i,n-1}\right)\right]}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\Rightarrow f_{i,n+1} = \frac{1}{2}\left(f_{i-1,n} + f_{i-1,n}\right) = f_{i-1,n}}$$

т.о., значение на слое n=2 определяется по формуле: $f_{i,2} = f_{i-1,1}$

для всех остальных n действует выражение (2).

ДОСТОИНСТВА СХЕМЫ «ЧЕХАРДА»

- она имеет второй порядок точности по всем переменным,
- с помощью метода фон Неймана можно получить , что c≤1

- Сведем КРУ «чехарда» (3) к ДУ путем разложения в ряд Тейлора

$$\frac{f_{i,n+1}-f_{i,n-1}}{2\Delta t}+u\frac{f_{i+1,n}-f_{i-1,n}}{2\Delta x}=a\frac{f_{i+1,n}+f_{i-1,n}-f_{i,n+1}-f_{i,n-1}}{\Delta x^2} \quad (3)$$

1) $$f_{i,n+1}=f_{i,n}+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2$$

$$f_{i,n-1}=f_{i,n}-\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2$$

$$\boxed{f_{i,n+1}-f_{i,n-1}=2\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t}$$

$$\boxed{f_{i,n+1}+f_{i,n-1}=2f_{i,n}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2}$$

2)

$$f_{i+1,n} = f_{i,n} + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2$$

$$f_{i-1,n} = f_{i,n} - \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2$$

$$\boxed{f_{i+1,n} - f_{i-1,n} = 2\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x}$$

$$\boxed{f_{i+1,n} + f_{i-1,n} = 2 f_{i,n} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2}$$

Подставим эти выражения в КРУ «чехарда» :

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{a}{\Delta x^2}\left(\frac{2f_{i,n}}{}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2-\frac{2f_{i,n}}{}-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-a\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Получили, что конечно-разностная схема ”чехарда“ аппроксимирует не исходное дифференциальное уравнение, а уравнение со второй производной по времени.

$$\boxed{\alpha_{аппр.}=a\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}}$$

- ошибка аппроксимации

Конечно-разностная схема аппроксимирует исходное данное уравнение только в том случае, если

$$\boxed{a\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \to 0}$$

или

$$\boxed{\frac{\Delta t}{\Delta x} \to 0}$$

т.е. Δt→ 0 быстрее, чем Δx→ 0

Практически сходимость проверяется следующем образом: решение пересчитывается с вдвое меньшим шагом. В данном случае при уменьшении Δx в два раза, Δt надо уменьшить не менее, чем в 4 раза.

Пусть отсутствует конвекция, т.е. *c=0*

*Т*огда уравнение (3) имеет вид:

$$\boxed{f_{i,n+1} = f_{i,n-1} + 2d\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - f_{i,n+1} - f_{i,n-1}\right)}$$

При $\boxed{d = \frac{1}{2}}$ $\Rightarrow f_{i,n+1} = \underline{f_{i,n-1}} + f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - f_{i,n+1} - \underline{f_{i,n-1}}$

$$\boxed{f_{i,n+1} = \frac{1}{2}\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n}\right)}$$

Теперь обратимся к уравнению с разностями вперед по времени и центр. раз. по пространственным переменам:

$$f_{i,n+1} = f_{i,n} + d\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - 2f_{i,n}\right)$$

При $\boxed{d = \frac{1}{2}}$ $f_{i,n+1} = \underline{f_{i,n}} + \frac{1}{2}\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n}\right) - \underline{f_{i,n}}$

$$\boxed{f_{i,n+1} = \frac{1}{2}\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n}\right)}$$

$$f_{i,n+1} = \frac{1}{2}\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} \right)$$

$$f_{i,n+1} = \frac{1}{2}\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} \right)$$

Т.о. при d=1/2 эти две схемы совпадают

Однако при d≠1/2 – полученные результаты и свойства устойчивости оказывается различными

Для стационарного уравнения $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

выражение для схемной вязкости имеет вид:

$$a_c = \frac{1}{2} u \Delta x$$

Рассмотрим теперь применение схемы “явный уголок” к данному уравнению для плоского двумерного нестационарного течения, учитывающему не только конвекцию, но и диффузию.

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial f}{\partial y}=a\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

Пусть $u \succ 0, \quad при \quad \vartheta \succ 0$

Тогда схема “явной уголок” имеет вид:

$$\frac{f_{i,j}^{n+1}-f_{i,j}^{n}}{\Delta t}+u\frac{f_{i,j}^{n}-f_{i-1,j}^{n}}{\Delta x}+\vartheta\frac{f_{i,j}^{n}-f_{i,j+1}^{n}}{\Delta y}=$$

$$=a\left(\frac{f_{i+1,j}^{n}+f_{i-1,j}^{n}-2f_{i,j}^{n}}{\Delta x^2}+\frac{f_{i,j+1}^{n}+f_{i,j-1}^{n}-2f_{i,j}^{n}}{\Delta y^2}\right)$$

Разложение в ряды Тейлора дает:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial f}{\partial y}=(a+a_{cx})\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(a+a_{cy})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

где

$$\boxed{a_{cx}=\frac{1}{2}u\Delta x(1-C_x)}\qquad \boxed{C_x=\frac{u\Delta t}{\Delta x}}$$

$$\boxed{a_{cy}=\frac{1}{2}\vartheta\Delta y(1-C_y)}\qquad \boxed{C_y=\frac{\vartheta\Delta t}{\Delta y}}$$

Из этих формул следует, что влияние схемной искусственной вязкости минимально, т.к. на практике невозможно добиться, чтобы C_x и C_y одновременно были =1 во всех областях течения.

Т.о. схемная вязкость обязательно будет входить в расчеты.

Точное решение невозможно до тех пор, пока не выполнено условие $a_c \prec\prec a$

Однако на практике это условие часто не очень жесткое. Например, для уравнений пограничного слоя

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \prec\prec 1 \qquad \vartheta \prec\prec 1 \Rightarrow a_c \prec\prec 1$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial f}{\partial y} = a\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} \quad (4)$$

- практически не зависит от

α_{cx} и α_{cy}

Достоинства схемы «явный уголок»:

- Хотя эта схема первого порядка точности,
- но для уравнений в консервативной форме определяется точнее, чем схема второго порядка
- В отличие от схемы «чехарда» эта схема при расчетах требует на один массив меньше, т.е. более экономична при испытании памяти ЭВМ.